TU DORTMUND Sommersemester 2015

Fakultät Statistik 08. April 2015

Prof. Dr. J. Kunert

M. Sc. J. Wiedom

M. Sc. C. Neumann

Übungen zur Vorlesung Statistik VI

Blatt 1

Aufgabe 1

Seien $(X_i : n \in I\!N)$ u.i.v. so, dass EX_i^4 existiert. Sei $\mu = EX_1$ und $\sigma^2 = VarX_1$.
Definiere $\bar{X}_{(n)} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n), n \in I\!N$ und, für $n \geq 2$, $S^2_{(n)} := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_{(n)}\right)^2$.
Zeigen Sie, dass $S^2_{(n)} \xrightarrow[\text{stoch.}]{} \sigma^2$.
Hinweis: Zerlegen Sie $S^2_{(n)} = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1} \left(\bar{X}_{(n)}\right)^2$ und verwenden Sie, dass $\bar{X}_{(n)} \xrightarrow[\text{stoch.}]{} \mu$.

Aufgabe 2

Seien $(X_i : n \in I\!N)$ u.i.v. mit bekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz, sodass EX_1^4 existiert.
Zeigen Sie, dass für

$$Z_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n} S_{(n)}},$$

mit $S^2_{(n)} = \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ gilt: $P^{Z_n} \xrightarrow[w]{} \mathbb{N}(0,1)$.

Aufgabe 3

Sei $X_n \sim \mathbb{P}_{n\mu}$ für festes $\mu \geq 0$. Zeigen Sie, dass für $Z_n := \frac{X_n}{\sqrt{n\mu}} - \sqrt{n\mu}$ gilt: $P^{Z_n} \xrightarrow[w]{} \mathbb{N}(0,1)$.
Hinweis: Stellen Sie X_n in der Form $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ dar, wobei $(Y_n : n \in I\!N)$ u.i.v. mit $P^{Y_1} = \mathbb{P}_\mu$ seien.

Abgabe bis Mittwoch, den 15.04.2015, 10.00 Uhr