

Des Grenzwertes Bürgschaft

Zu Cauchy dem Tyrannen schlich
Eine unendliche Reihe, die Nullfolge im Gewande.
Sie schlug die harmonische Reihe in Bande.
"Was willst du mit der Nullfolge, sprich?"
Entgegnet ihr finster der Wüterich.
"Die Folgen und Reihen von der Divergenz befreien!"
"Das sollst du mit $(-1)^n$ bereuen."

"Ich bin," spricht jene, "zu divergieren bereit
und bitte nicht um ein konvergentes Leben,
doch willst du Gnade mir geben,
so flehe ich dich um der Partialsumme Zeit,
bis ich die Teilfolge aus dem unendlichen Intervall befreit.
Ich lasse dir meinen Grenzwert als Bürgen,
ihn magst du, versage ich, erwürgen."

Da lächelte Cauchy mit arger List
Und spricht nach kurzem Bedenken:
" $n + 1$ Partialsummen will ich dir schenken.
Doch wisse! Wenn sie verstrichen, die Frist,
ehe das offene Intervall unendlich oft geschachtelt ist,
so werde ich deinen Grenzwert in links und rechts zerschneiden,
und beide werden auf Ewig an Ungleichheit leiden."

Und die Reihe kommt zum Grenzwert: "Cauchy sagt
Dass ich in Divergenz verbringen muss mein Leben,
als Strafe für mein frevelhaftes Streben,
doch will er mir gönnen $n + 1$ Partialsummen Zeit,
bis ich die Teilfolgen aus dem unendlichen Intervall befreit,
so bleibe du in Cauchy's Kriterium als Pfande,
bis ich mit wahrer Abschätzung komme, zu lösen die Bande."

Und schweigend umgibt die Reihe der treue Grenzwert,
liefert sich aus dem mathematischen Tyrannen,
während die Reihe zieht von dannen.
Und ehe der $(n + 1)$ -ste Grenzwert aufgeht,
hat sie alle Teilfolgen in eine Vereinigungsmenge bewegt,
konvergiert nun mit sorgender Seele,
zum Grenzwert, damit sie die Frist nicht verfehle.

Da gießen unendliche alternierende Reihen hinab,
aus dem Analysisbuch stürzen die Konvergenzkriterien,
mit Potenzen aus der unendlichen Dezimaldarstellung Serien.
Fast fällt auf sie der punktweise konvergente Grenzwert,
als er kommt an der Funktionenreihe Fluss,
Donnernd weitet sich das Heine-Borel-Intervall,
mit lautem konstruktivem Nullstellen Hall.

Und der Potenzreihen Koeffizienten versenden glühenden Brand,
Vom unendlichen Konvergenzradius ermüdet
fallen die letzten Koeffizienten der Reihe auf des Bolzano-Weierstrass Sand.
"Oh du hast mich gerettet aus des unendlichen Intervalls Hand,
hast mir gezeigt den Weg in das heilige Konvergenz-Land,
und nun soll ich hier in den nicht aufhörenden Koeffizienten vergehen,
und der mir treue Grenzwert, mein Freund, wird mich niemals wiedersehen.

Doch horch! Da konvergiert es silberhell,
stetig, wie eine Nullfolge, die monoton fällt,
und die Reihe hält inne, um zu lauschen,
ob es möglich ist, Grenzwerte nach dem Umordnungssatz zu vertauschen.
Und siehe, ein Konvergenzkriterium fällt,
mit ihm eine konvergente Partialsumme erscheint,
an die sich wie in Konvergenzräumen ein Grenzwert reiht.

Und es blicket durch das $|x - x_0|$ Intervall einer Funktion monotoner Teil,
gleichmäßig stetig fällt sie in \mathbb{R} wie ein Seil,
und es malt ihre Funktionenreihe einen Grenzwert ans Ende des Intervalls,
Der einzige Häufungswert glänzt und strahlt als dessen Widerhalls.
Da sieht sie ein ϵ und ein δ um den Graph sich zieht,
und hört die Worte sie sagen:
"Jetzt wird der Grenzwert in einen \limsup und einen \liminf zerschlagen!"

Angst befügelt der Reihe eilenden Fuß,
sie jagen der Sorge um den treuen Grenzwert Qualen,
da schimmern in der komplexen Zahlen Strahlen
von Ferne die Achsen des Koordinatensystems.
Und entgegen kommt ihr eine konvergente Majorante,
die trotz des Quetschlemmas Verpflichtung der Reihe entgegen rannte,
welche den Schrecken in ihrem Gesicht sofort erkannte.

"Zurück!" Du rettetest den Grenzwert nicht mehr,
so rette dein eigenes konvergentes Leben,
die Ungleichheit von \limsup und \liminf erleidet er soeben.
Von Koeffizient zu Koeffizient gewartet hat er,
sogar noch bei $2n + 2$ Partialsummen gehofft auf deine Wiederkehr,
ihm konnte den gleichmäßig konvergenten Glauben
der Hohn des Tyrannen nicht rauben."

"Und ist es zu spät, und kann ich ihm auch nicht
die Grenzwerte der beiden Seiten leimen,
so soll mich die Divergenz mit ihnen vereinen.
Im Zwischenwertsatz wird Cauchy eines Tages untergehen,
dass in einem kompakten Intervall Konvergenz herrscht, wird er sehen,
dass dem Freund des Grenzwertes die Treue ist die oberste Pflicht,
und sein Cauchy Kriterium mit vollständiger Induktion noch nicht bewiesen ist."

Der ϵ -Streifen um den Graphen verengt sich, das steht sie am Einheitskreis
und sieht die Doppelreihen den Freund umschließen,
die Menge der reellen Zahlen gaffend ins Koordinatensystem fließen,
An den Kriterien für absolute Konvergenz zieht man schon den Freund empor,
da zertrennt die Reihe rekursiv der Doppelreihen lästernden Chor:
"Mich, Cauchy!" ruft sie ins offene Intervall, "erwürget!
Ich bin es, für den der arme Grenzwert gebürget!"

Und Erstaunen ergreift die reellen und komplexen Zahlen umher,
In den Armen liegen sich Grenzwert und Reihe,
Und weinen für L'Hospital und gleichmäßige Konvergenz.
Da sieht man keine Reihe oder Folge ohne Grenzwert mehr,
Zu Cauchy bringt man sogleich die Wundermär,
der fühlt ein punktweise konvergentes Rühren,
lässt schnell sie ins Cauchy Kriterium führen.

Und er blicket sie lange verwundert an.
Darauf spricht er: "Es ist euch gelungen,
ihr habt die lieblose Divergenz in mir bezwungen,
die absolute Konvergenz bei Reihen ist doch kein leerer Wahn,
so nehmet auch mich als Hilfe auf dem Weg zur Konvergenz an.
Ich sei, gewährt mir diese stetige Bitte,
in eurem Bunde als das no der Dritte."

©Annette Möller, Dezember 2002